Problem 3: Spectroscopy of interstellar molecules

3-1. $100\lambda = 2.9 \times 10^{-3}$ m K $\quad\quad \lambda = 2.9 \times 10^{-5}$ m

$E(\text{photon}) = hc/\lambda = (6.63 \times 10^{-34}$ J s$)(3.0 \times 10^{8}$ m/s$)/(2.9 \times 10^{-5}$ m$)$

$= 6.9 \times 10^{-21}$ J

まずは与えられているウィーンの法則の式を使って波長を算出する。

$T\cdot\lambda = 2.9 \times 10^{-3}$ m·K より $\lambda = 2.9 \times 10^{-3}/T = 2.9 \times 10^{-5}$

得られた波長を使って光子1個あたりのエネルギーを計算すればよい。

$E = h\cdot\nu = h\cdot c/\lambda$ （ここで，$h = 6.63\times10^{-34}$ J·s：プランク定数，$\nu = c/\lambda$：光の周波数[Hz]，c：光速）

よって

$E = (6.63\times10^{-34}$ J·s$)\times(3.0\times10^{8}$ m/s$)/(2.9 \times 10^{-5}$ m$) = 6.9 \times 10^{-21}$ J

3-2. J: $0 \leftrightarrow 1$

$\mu = (12\text{x}16/28)(1.66 \times 10^{-27}$ kg$) = 1.14 \times 10^{-26}$ kg

$I = \mu R^2 = (1.14 \times 10^{-26}$ kg$)(1.13 \times 10^{-10}$ m$)^2 = 1.45 \times 10^{-46}$ kg m^2

$E(0\leftrightarrow1) = 2\, h^2/8\pi^2 I = 2(6.63 \times 10^{-34}$ J s$)^2/[8\pi^2(1.45 \times 10^{-46}$ kg m$^2)]$

$= 7.68 \times 10^{-23}$ J

E(photon) of Problem 3-1 $= 6.9 \times 10^{-21}$ J $> E(0\leftrightarrow1) = 7.68 \times 10^{-23}$ J

Rotational excitation by the background radiation is feasible.

与えられているエネルギーの式をから，準位間のエネルギー差を表す式を導く。

$E_{J+1} - E_J = (J+1)(J+2)h^2/8\pi^2 I - J(J+1)h^2/8\pi^2 I = 2(J+1)h^2/8\pi^2 I$

この結果から J が大きくなるにつれ，準位間のエネルギー間隔が広がっていくことがわかる。

したがって，準位間のエネルギーが最小となるのは J=0とJ=1 の間の遷移である。よって上式において J=0 の場合を計算すればよい。

$2(J+1)h^2/8\pi^2 I\ [J=0] = h^2/4\pi^2 I$, （ただし $I = \mu R^2$）

$\mu = (12\text{x}16/28)(1.66 \times 10^{-27}$ kg$) = 1.14 \times 10^{-26}$ kg

$I = \mu R^2 = (1.14 \times 10^{-26}$ kg$)(1.13 \times 10^{-10}$ m$)^2 = 1.45 \times 10^{-46}$ kg m^2

よって

$2\, h^2/8\pi^2 I = 2(6.63 \times 10^{-34}$ J s$)^2/[8\pi^2(1.45 \times 10^{-46}$ kg m$^2)] = 7.68 \times 10^{-23}$ J

3-1で求められた光子のエネルギーは 6.9×10^{-21} J

CO 分子の場合は 7.68×10^{-23} J

両者を見比べると，100K におけるピーク波長の光子のエネルギーの方が2桁近く高い。よって100K の背景電磁放射によって CO の回転準位の励起は十分に起こりうる。

3-3. $E(0\leftrightarrow2) = 6\, h^2/8\pi^2 I = hc/\lambda \quad\quad \lambda = 8\pi^2 cI/6h$

$I = \mu R^2 = [(1/2) \times 1.66 \times 10^{-27}$ kg$](0.74 \times 10^{-10}$ m$)^2 = 4.55 \times 10^{-48}$ kg m^2

$\lambda = 8\pi^2 Ic/6h$

$= [8\pi^2 \times 4.55 \times 10^{-48}$ kg m$^2 \times 3 \times 10^8$ m/s$]/(6 \times 6.63 \times 10^{-34}$ J s$)$

$= 2.71 \times 10^{-5}$ m

$T = 2.9 \times 10^{-3}$ m K $/\lambda = 2.9 \times 10^{-3}$ m K $/ 2.71 \times 10^{-5}$ m $= 107$ K

Observation of hydrogen rotational spectra is feasible at 100 K.

水素分子($^1H_2$)の J=0 と J=2 の準位間の遷移エネルギーと光子のエネルギーを等しいと置く。

$$E(0 \leftrightarrow 2) = 6\ h^2/8\pi^2 I = hc/\lambda$$

これを波長に関して整理する。

$$\lambda = 8\pi^2 cI\ /6h$$

水素分子の慣性モーメントを計算しておく。

$$I = \mu R^2 = [(1/2) \times 1.66 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}](0.74 \times 10^{-10}\ \mathrm{m})^2 = 4.55 \times 10^{-48}\ \mathrm{kg\ m^2}$$

よって,

$$\lambda = 8\pi^2 Ic\ /6h$$

$$= [8\pi^2 \times 4.55 \times 10^{-48}\ \mathrm{kg\ m^2} \times 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}]/(6 \times 6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s}) = 2.71 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}$$

求めた波長からウィーンの法則に基づいて温度を計算する。

$$T = 2.9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m\ K}\ /\lambda = 2.9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m\ K}\ /\ 2.71 \times 10^{-5}\ \mathrm{m} = 107\ \mathrm{K}$$

よって100K の背景電磁放射によって水素分子の回転スペクトルは十分に観測できる。