

## 問題12. 曲線から直線へ

スイスにおいての初めての列車は、1847年にチューリッヒからバーデンまでを(16 km)走行した。最初に建設された線路は鋼の熱膨張による応力が原因で曲がりうるものであった。更に、その線路を最初の直線の形に戻すことは出来なかった。後にこの問題を防ぐ為の工学的解決法が発展した。



数学においては、極度に曲がったグラフさえも時に線形で表すことができるため、線路のような問題はおこらない。また、線形のグラフは点が2つあれば一意に定義できるため、数学的な線形化はSTEMのビッグデータセット分析に有用である。線形化によって、複雑な方程式でさえも単純な関係を見いだすことができる。

## A. 理想気体の法則

**12.1** 圧力( $P$ )と体積( $V$ )の関数で構成される変数を選ぶことで、一定温度下での理想気体の法則についての線形化された方程式を求めよ。

(脚注：一次関数の形の方程式を求めよ。)

**12.2** 前問の線形化された式をグラフで表示した場合における、傾きと $x$ 及び $y$ 切片を求めよ。また、温度が上昇した時にこのグラフがどの方向に移動するか述べよ。

**12.3** 実験的には、高圧下において気体の振る舞いはこの線形プロットからずれる。なぜこのようなずれが観測されるか説明せよ。

## B. 平衡定数

**12.4** 平衡定数を温度の関数  $K=f(T)$  として線形にプロットをするためには、 $x$ 軸と $y$ 軸をどのように設定すべきか述べよ。

**12.5** 前問と同じような軸の組み合わせを用いると線形にプロットすることができる方程式を以下から選べ。また、選んだ方程式のそれぞれについて、プロットの傾きを計算する数式を求めよ。

- 一次反応の速度式
- ゼロ次反応の速度式

## 問題12. 曲線から直線へ

- c) 相平衡におけるクラウジウス-クライペロンの式(液体-気体)
- d) 相平衡におけるクライペロンの式(固体-液体)
- e) ネルンストの式(電位を特定の濃度の関数として書く)
- f) アレニウスの式

12.6 平衡定数を圧力の関数  $K=f(P)$  として線形にプロットをするためには、 $x$ 軸と $y$ 軸をどのように設定すべきか述べよ。この場合において、プロットの傾きを求めよ。

## C. 数学的方程式の例

他の興味深い方程式  $y=a \cdot x/(b+x)$  を見てみよう。三つの異なる線形化手法がこの方程式に適応できる。最初の線形化法では傾き  $1/a$  となり、二つ目では  $x$ 切片が  $-1/b$  となり、三つ目では  $y$ 切片が  $a$  となる(表を見よ)。

No.	Linearized equation	Slope	Horizontal intercept	Vertical intercept
1		$1/a$		
2			$-1/b$	
3				$a$

脚注：Slope:傾き, Horizontal intercept:  $x$ 切片, Vertical intercept:  $y$ 切片

12.7 この表を完成させよ。

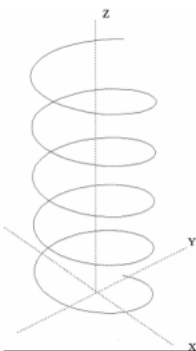
## D. ヘリックスの方程式

1908年にブルジョーループ高架橋として知られる驚くべきらせん状の線路がスイスのグラウビュンデン州に建設された。この橋は2008年にユネスコの世界遺産に登録された。



同様のらせん構造を有する有名な分子として、二重らせん構造をとるDNAがある。それぞれのDNAヘリックスを表す数学的な三次元方程式は、半径  $r$  とピッチ  $p$  (ヘリックスが完全に一回転するヘリックスの高さ) を定数として持つ弦巻線として知られている。

## 問題12. 曲線から直線へ



始点が $(x=0, y=r, z=0)$ であり、 $z$ 軸がヘリックスの中心に位置し、らせんがその周りを回転するヘリックスの方程式を考えよう(図を見よ)。角度 $\alpha$ は $XY$ 平面に対するヘリックスの傾きで、ヘリックス角として知られる。角度 $\beta$ はヘリックスの回転の角度で、例えば $\beta=720^\circ$ はヘリックスの完全な二回転に相当する。ヘリックスの $x$ および $y$ 座標は $\beta$ の関数として、 $x=r \cdot \sin \beta$ ,  $y=r \cdot \cos \beta$ と書ける。

12.8 ヘリックスの高さを角度 $\alpha$ と $\beta$ を用いた式で式を表せ。

12.9 ヘリックスの高さを、積 $(\alpha \cdot \beta)$ の線形な関数で表した式を書け。

12.10  $\alpha$ が定数であるとき、(角度 $\beta$ の代わりに $x$ か $y$ を用いて) $z$ を線形な関数として表すことは可能か述べてよ。

12.11 2023回転を持つDNA分子鎖の合計の長さ(mm)を計算せよ。ただし、鎖の傾きは $\alpha=20^\circ$ で、半径は $r=20 \text{ \AA}$ とする。