



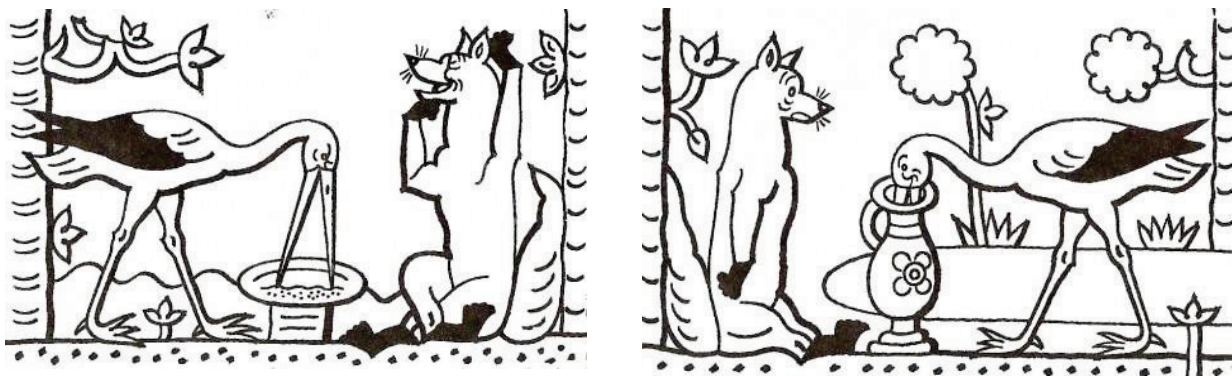
## 問題18. キツネとツル

ある日、キツネがツルを夕食に招いた。何も楽しみは用意しないものの、浅い皿に入れた薄いスープを用意することで、キツネはゲストのツルをからかおうとした。

このスープをキツネはとても簡単に舐める一方で、ツルはその細長いくちばしでは一口も飲むことができず、最後まで空腹のままだった。しかしキツネは、ツルがとても控えめにスープを飲んでいるのを見て、口に合わなかったのではないかと残念がるふりをした。

ツルはほとんど何も言わなかったものの、夕食に誘ってもらったことのお礼をさせてほしいとキツネに申し出た。そこで、キツネはツルと一緒に後日夕食に行くことにした。キツネが予定の場所に行くと、料理はすぐに注文された。

食事が運ばれてきたのを見て、キツネは落胆した。というのも、料理は細長い首の瓶状の容器に入っていて、ツルは簡単にその長くちばしと首を突っ込めるが、キツネは容器の縁をなめることしかできなかつたからである。おなかを満たすことができないので、キツネはできるだけ潔く夕食をやめた。自分がツルにしたことをそのままやり返されただけで、ツルを責めることはできなかつたからである。



この童話の（灰色の部分に代わる）別の結末はこのようなのだろうか：

しかし、キツネはとても賢かったので周囲を見渡し、スープを飲めないという問題の解決策を見つけた。周りには多くの小石があつたので、キツネはためらいなくそれをスープの容器の中に向かって投げ入れた。ツルは困惑して首を横に振ったが、キツネは、スープの液面が容器の縁に達するまで小石を投げ入れ続けた。そして、ニタニタ笑いながらツルのほうを向いて言った。「もちろん、私もいただくよ。」そして、スープを飲み始めた。

容器の中のスープの体積は最低限、キツネの解決策が成功するために十分な量でなくてはならない。この体積は最終的に容器の中に入れられた小石全体の体積に関する。小石全体の体積は小石の数、大きさ、そして配置によって変化する。

さて、状況を以下の幾何学的なモデルで考えよう。

- 容器は直径10 cm、高さ50 cmの完全な円柱であるとする。
- 小石は硬い真球であるとする。
- すべての球は同じ直径であるとする。
- 球はそれぞれが接するようにできる限り近くに配置されるものとする。
- スープは水であると近似する。



- すべての小石は完全に容器の中にあるとする。(つまり、小石はすべて円柱の上端からはみ出していないということである。)

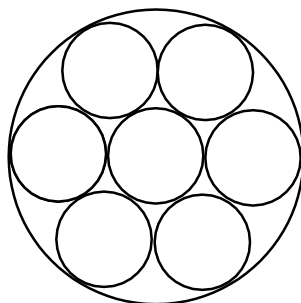
### 大きな石の場合

半径5 cmの球を考えよう。

- 18.1 円柱の中に最大いくつの球が入るか計算しなさい。
- 18.2 この数の球の体積が円柱に占める割合は何%か計算しなさい。
- 18.3 そのとき、球と球の間の、水の入ることのできる空間の体積が何 $\text{cm}^3$ か計算しなさい。

### 小石の場合

第1層(最下層)で7つの球がぴったり円柱に接しているような配置を考えよう。:

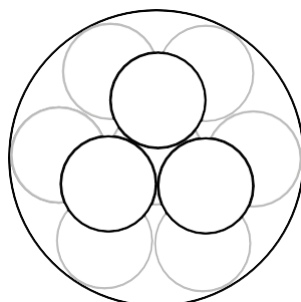


- 18.4 小球の半径(単位はcm)を計算しなさい。

以下の問い(訳注:18.5~18.8)では、容器内の小石の層すべてが第1層の配置と同じになる場合を考える。

- 18.5 円柱内に最大で何層重ねられるか計算しなさい。
- 18.6 円柱の中に最大いくつの球が入るか計算しなさい。
- 18.7 この数の球の体積が円柱に占める割合は何%か計算しなさい。
- 18.8 そのとき、球と球の間の、水の入ることのできる空間の体積が何 $\text{cm}^3$ か計算しなさい。

以下の問い(訳注:18.9~18.12)では、容器の底から数えて奇数番目の層は第1層と同じ配置で、偶数番目の層は3個の球からなる場合を考える。



- 18.9 円柱内に最大で何層重ねられるか計算しなさい。



- 18.10 円柱の中に最大いくつの球が入るか計算しなさい。
- 18.11 この数の球の体積が円柱に占める割合は何%か計算しなさい。
- 18.12 そのとき、球と球の間の、水の入ることのできる空間の体積が何 $\text{cm}^3$ か計算しなさい。

### 砂の場合

円柱の直径に比べて非常に小さい直径の小球を考えよう。(  $r \rightarrow 0$  )

- 18.13 すべての球の体積が円柱に占める割合の極限值は何%か計算しなさい。
- 18.14 そのとき、球と球の間の、水の入ることのできる空間の体積が何 $\text{cm}^3$ か計算しなさい。