問題 4. 2次元・3次元の箱の中の粒子

(20140303 修正：ピンク色の部分)

1. 問題3で、1次元の箱の中の粒子のエネルギーEは次のように計算された。

$$E = n^2 \frac{h^2}{8m\mathrm{L}^2}$$

ここで、hはプランク定数、mは粒子の質量、Lは箱の長さ、n(=1,2,3…)は量子数を表す。

10nmの一次元の箱の中の電子が、波長1.374×10^{-5} mの電磁波を吸収して基底状態から高エネルギーの状態に励起されたとする。

1.1 基底状態と高エネルギーの状態のエネルギー差を求めよ。

1.2 励起後のエネルギー準位を求めよ。

2. 1次元の箱の中の粒子の理論を応用すると、各辺の長さがL_x, L_yの2次元の箱の中の粒子のエネルギーは次のように表すことができる。

$$E = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{\mathrm{L}_x^2} + \frac{n_y^2}{\mathrm{L}_y^2}\right)$$

2つの量子数はそれぞれ互いに無関係に整数値のみをとることができる。x軸方向の長さがL_x = 8.00 nm y軸方向の長さが L_y = 5.00 nmの2次元の箱に1つの電子が閉じ込められている場合を考える。

2.1 エネルギーの最も低い3つのエネルギー準位の量子数の組を示せ。また、それらのエネルギーを大きい方から順に並べよ。

2.2 最もエネルギーの低い励起状態から、2番目にエネルギーの低い励起状態に電子を遷移させるのに必要な光の波長を求めよ。

3. 同様にして、1次元の箱のなかの粒子の理論を応用すると、各辺の長さがL_x, L_y, and L_zである3次元の箱の中の粒子のエネルギーが次のように求められる。

$$E=\frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2}+\frac{n_y^2}{L_y^2}+\frac{n_z^2}{L_z^2}\right)$$

3つの量子数n_x, n_y, n_zはそれぞれ独立に整数値を取ることができる。酸素分子が一つ体積8.00 m^3の立方体の箱のなかに閉じ込められている。分子のエネルギーを6.173 × 10^{-21} J、温度をT=298 Kとする。

3.1 この酸素分子の $n=(n_x^2+n_y^2+n_z^2)^{\frac{1}{2}}$ の値を求めよ。

3.2 エネルギー準位*n*と*n+1*(訳注： $n+1=(n_x^2+n_y^2+n_z^2)^{\frac{1}{2}}$ となるような準位のこと)のエネルギー差を求めよ。

4. 量子力学において、量子系の2つ以上の状態が同じエネルギーを持つとき、そのエネルギー準位は縮退しているという。立方体の箱の中の粒子について、エネルギーが基底状態の21/3倍であるエネルギー準位が何重に縮退しているか求めよ。