問題１６　果物、野菜、原子

この問題を解く際、果物や野菜は壊れないものとする。
また、果物や野菜は球とみなしてよい。

1611 年、ドイツの数学者で天文学者のヨハネス・ケプラーはピラミッド型に積まれたキャノンボール（砲丸）を観察した。彼は硬い球をぴったりと積み重ねる方法は一通りしかなく、同じ容器に詰め込められる球の数は決まっていると断言した。これは後に“ケプラー予想”と呼ばれることになる。1998 年にトーマス・ハレス教授はケプラー予想の証明を 1997 年以降“Discrete and Computational Geometry”という雑誌上で発表した。彼はケプラーによって見出された充填方法に加えて 150 以上もの異なる方法を考察した。ハレス教授の証明は原稿 250 ページ、またコンピュータのファイル容量は３ギガバイトにもおよんだ。このようにして、面心立方格子が最も密な球の充填方法であるということはコンピュータを駆使した数学的証明を経て固体化学の分野で認められるに至った。

ここでは“ケプラー予想”に対する新たな証明方法を求めてはいない。日常の経験に照らし合わせながら，同じ大きさの球の最も効果的な配置問題を考えていく。

1.　トマトを運搬することを考える。運搬の際の破損を防ぐためには、トマトを一段の棚にきれいに一層並べることが重要である。図２に示した二つの並べ方について考える。

a) トマトの二つの配置方法 A と B の場合において、それぞれのトマトの充填密度 φ を求めよ。S はこの場合、投影面積を意味している。

$\varphi = S_{\mathrm{tomato}} / (S_{\mathrm{void}} + S_{\mathrm{tomato}})$.

b) 棚の面積が少なくてすむのはどちらの方法か？

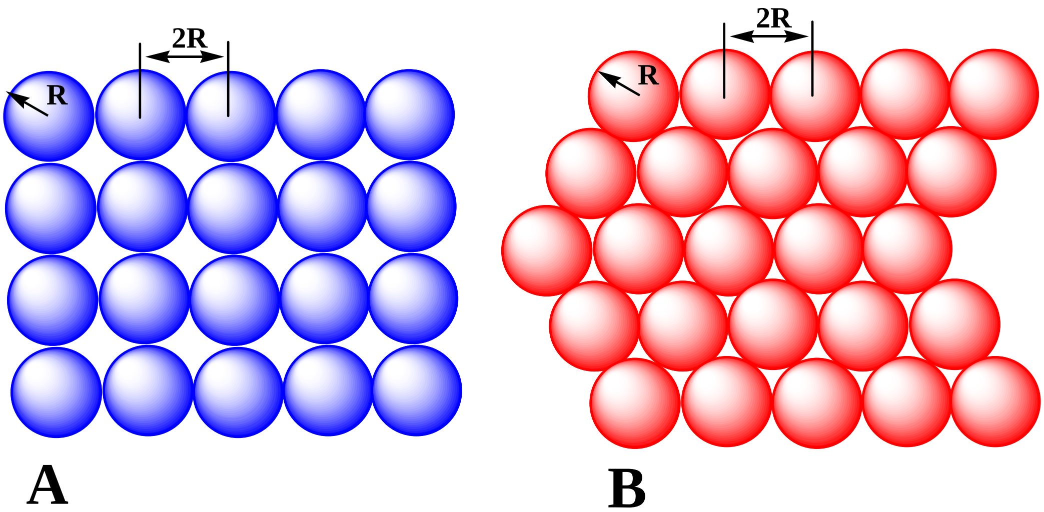

図 2　トマトの 2 通りの配置方法

2.ジャガイモやキャベツのような硬い野菜を容器に詰めていく。いくつかの充填方法について考える。

(1) 第一層はタイプ A (図 2)である。第二層は第一層の完全なコピーであり、第二層の野菜は第一層の野菜の真上に置く（このような充填方法を単純立方、あるいは simple cubic の頭文字をとって s.c.と呼ぶ）。

(2) 第一層はタイプ A である。第二層の野菜は第一層の野菜の隙間の上に置く（このような充填方法を体心立方充填、あるいは body centered cubic packing の頭文字をとって b.c.c.と呼ぶ）。

(3) 第一層はタイプ B である。第二層は第一層の完全なコピーであり、第二層の野菜は第一層の野菜の真上に置く（このような充填方法を六方充填、あるいは hexagonal packing の頭文字をとって h.p.と呼ぶ）。

(4) 第一層はタイプ B である。第二層の野菜は第一層の野菜の隙間の上に置く（このような充填方法を六方最密充填、あるいは hexagonal close packing の頭文字をとって h.c.p.と呼ぶ）。

a) 上記(1)～(4)の場合の充填体積密度ϕを求めよ。

b) トラックを一杯にするにはどの方法が最も効率的か？

c) タイプ B の場合、第三層の並べ方として二つの方法がある。ｉ）第一層の野菜の真上に第三層の野菜を置く（つまり第二層の野菜の隙間の上に置く）方法、ii）第一層の野菜の隙間の真上に第三層の野菜を置く方法である（図 2 中の B）。面心立方、

あるいは face centered cubic packing の頭文字をとって f.c.c.と呼ばれる二番目の方法の充填体積密度ϕを求めよ。

d) 農夫は第三層を f.c.c.の方法で詰めようとした。しかし、どこが第一層の隙間でどこが第一層の野菜か分からなくなってしまった。最密充填した層の配置を間違えるとϕはどのように変化するか？

3. その愉快な農夫はトラックでスイカと桃を一度に運ぶことを考えた。彼はスイカの隙間に桃を並べることを思いついた。

a) 下記の場合における桃が破損しないような桃 / スイカの半径の比（$R_{もも}$ / $R_{すいか}$）の最大値を求めよ。

(1)　立方体 s.c.構造
(2)　8 面体 b.c.c.構造
(3)　8 面体 f.c.c.構造

b) s.c.、h.c.p.、b.c.c.、f.c.c.型の充填方法を用いた場合、その農夫はそれぞれ一つのスイカに対して（最大）何個の桃を置くことができるか？

c) 隙間に桃が置かれた s.c.、b.c.c.、f.c.c.型充填構造のϕの最大値はそれぞれいくつか？

4. トラック内では風通しが悪く果物が腐ってしまう。

a) b.c.c.充填構造と f.c.c.充填構造の隙間を維持するため、その農夫は桃を置いた８面体の隙間同士が端や面で接しないように置くことにした。この場合、一つのスイカに対していくつ桃を置くことができるか？

b) その農夫に別の素晴しい考えが浮かんだ。桃は f.c.c.構造である 8 面体の隙間に置くことができるのに対し、リンゴは4面体の隙間に置くことができる。この場合、彼は一つのスイカに対していくつリンゴを置くことができるか？

自然は“ケプラー予想”のようなパズルを生み出す。例えばオパール石は c.p.s.充填されたシリカ（SiO_2）のミクロ球から成る天然の石である。オパールの主な特徴は、光に照らされた時すばらしい光沢（玉虫色と呼ばれる）を呈し、宝石として重宝されていることである。この現象は、ブラッグの式に従う可視光の回折によって説明できる。

$\lambda = 2d \sin\theta$

ここで、λは光の波長、d はオパールの c.p.s.構造の層間距離、2θは入射光と回折光間の角度である（すなわち、θはオパール石の表面に対する光線の傾斜角である）。

オパールはフォトニック結晶の典型であり、高い屈折率を有するシリカ（SiO_2）のミクロ球が最密充填されている材料である。フォトニック結晶の光学スペクトルは変わった特性を示す。例えば、半導体にみられる電子バンドギャップのような、光学バンドギャップである。フォトニック結晶は今後特に将来の情報技術(IT)である光通信分野での利用が期待されている。

5. a) f.c.c.構造において許される第一反射の最小のミラー指数（hkl）は何か。

b) 第一反射が２θ＝60°に観測されたとき、光の波長を計算せよ。なお、SiO_2 のミクロ球の半径を 450 nm とする。SiO_2 の屈折率の分散 (すなわち，屈折率の波長依存性) は無視できるものとする。